分数多角形と対数螺旋のフォルム

Form of Fractional Regular Polygon and Logarithmic Spiral

吉田美穂子
Yoshida Mihoko
梅花女子大学

Key words：Golden Ratio, Fractional Regular Polygon, Logarithmic Spiral

１． 研究の背景と目的

1.1.同じ形が集まると螺旋が見える

正六角形を敷き詰めると図 1 のように対数螺旋が見える。また､2 つの底辺が 72°の二等辺三角形(黄金三角形と呼ぶ[注 1]）の相似形を集めても対数螺旋が現れる（図 1)。図 2 のように黄金分割された長方形を考え[注 2]､そこに円を描いて作図したものが正方形の黄金分割螺旋（図 3）となる。

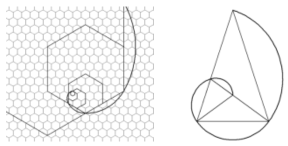


図1 合同図形や相似図形の集合に現れる対数螺旋

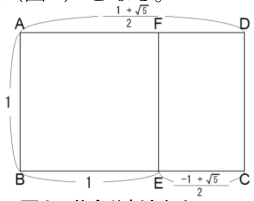


図2 黄金分割された長方形の辺の長さ

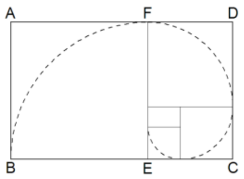


図3 正方形の黄金分割螺旋の作図

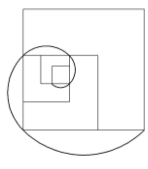


図4 正方形の黄金分割螺旋の作図２

ここで、この正方形の黄金分割螺旋の式を求める。図 3 の対数螺旋は図 4 のように 90°(ラジアンでは π/2)毎にφ倍した対数螺旋の方程式を求めることになる(図4の作図法は図 9 参照)。

本来、対数螺旋は作図のように急に大きくならずになめらかに拡大されるため、円ではなく、曲線で描かれるもので、極座標では $r = k\ e^{(\cot b)\theta}$ で表わされる(e は自然対数の底のことで 2.7182818284…。θは中心の角度(ラジアン)。b は曲線の接線と中心からの線とがなす角度で、常に一定になることから対数螺旋は等角螺旋とも呼ばれる(図 5)。なお、b の値で曲線の曲がり方が決まり、値が小さいと対数螺旋は大きく開く)。拡大・縮小しても対数螺旋の形状は変わらないので、k = 1 とする。

$\theta \cot b = \ln r$

$\cot b = (1/\theta) \ln r$

θがπ / 2 回るごとに $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ ずつ拡大していくので

$\cot b = (2/\pi) \times \ln(\phi)$

$\phi = 1.61803398875$ を代入すると

$(\pi/2) \times \ln(1.61803398875) = 0.30634896253$

よって、対数螺旋の式は $r = e^{0.306\theta}$

また、cotb = 0.30634896253 のとき b = arccot0.30634896253 であるから、b = 72.96760887004° およそ 73.0° となる。(表 1)

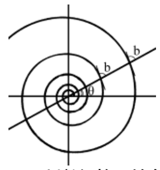


表１ 対数螺旋の式と角度ｂ

図形名称	外角 度数	外角 ラジアン	倍率	cotb	b 度数
黄金三角形	108	3π /5	φ	0.255	75.7
正方形	90	π /2	φ	0.306	73.0
正六角形	60	π /3	2	0.662	56.5

図5 対数螺旋は等角螺旋

次に図 1 の対数螺旋の式を求める。

左の正六角形が外角の 60°（ラジアンでπ/3)毎に 2 倍になるときの対数螺旋となる。結果は $r = e^{0.662\theta}$ b = 56.5°

右の黄金三角形では頂点の外角の 108°（ラジアンでは 3π/5)毎にφ倍となる対数螺旋で、$r = e^{0.255\theta}$ b = 75.7°となる。

1.2. 分数多角形

正五角形の外角は 360°÷5 で 72°であるが、正５／２角形の外角は 360°÷(5/2)で 144°となる。では正５／３角形はどうかを考える。図 6 は正五角形の外角を表わし、図 7 は正５／２角形の外角を表わしている。図 8 は正５／３角形が正５／２角形と逆向きに作図されることを示したものである。

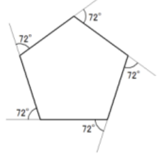


図6 正五角形と外角

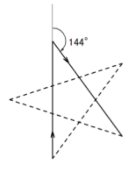


図7 正５／２角形と外角

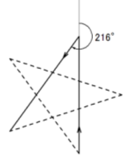


図8 正５／３角形と外角

なお、上村文雄による定義[注 3]によると、3/10 角形は 3/(10 − 3) = 3/7 角形で、3/(7 − 3)= 3/4 、さらに 3/4 = 3/1 で三角形となる。以下、この定義に従って作図する。なお、本稿での作図はすべて CAD ソフト[注 4]を用いた。

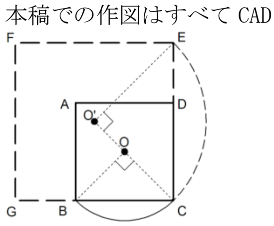


図9 正方形の黄金分割螺旋の作図

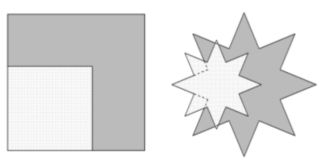
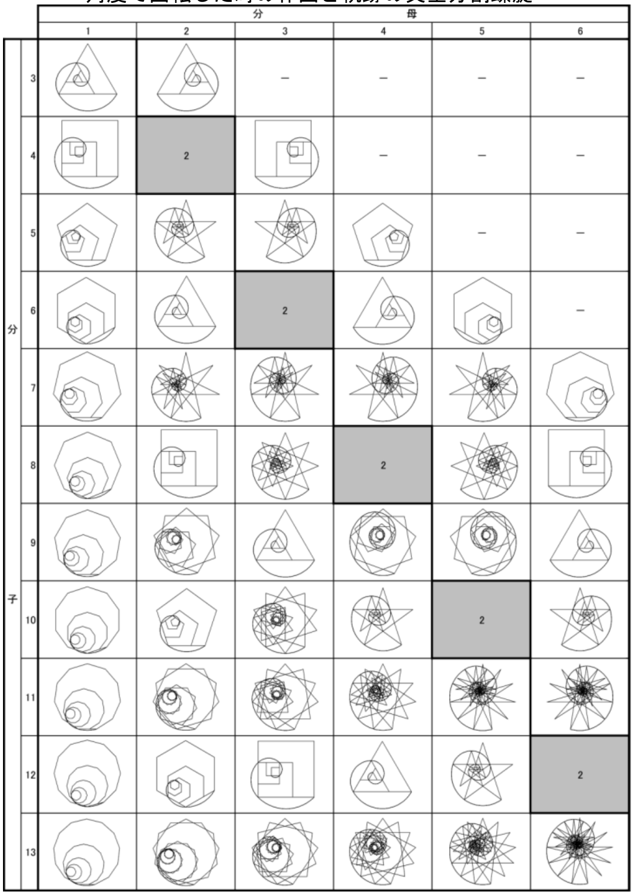


図 10 正方形と正８／３角形をその外角の角度で黄金比率の割合で拡大しながら回転した時の現れ方

表２ 分数の正多角形を黄金比率で拡大しながら外角と同じ角度で回転した時の作図と軌跡の黄金分割螺旋



2.研究の方法と結果

3 角形から 13 角形までの様々な分数の正多角形の外心でその外角の角度分を回転させて円弧を描き、黄金比の倍率に拡大させた一辺を持つ分数の正多角形を作図し、さらにその正多角形の外心から外角の角度分を回転させて円弧を描く。同じ操作を繰り返しながらその円弧を繋げていき、作図した回転の軌跡である対数螺旋の式と角度 b を求めて比較し、効果的な見せ方という点に着目して検討をおこなう。なお、朝山秀一[注 5]の論文を参考にし、4 回程度の繰り返しに留めた。

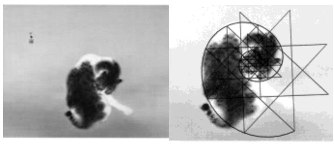
具体的な作図具体例として図 3 で示した正方形を参考に回転の中心となる点を取り替えながら円弧を描く操作を 4 回繰り返し、合計 5 個の円弧を繋げて螺旋に近い曲線を描いていくという手法で作図していった（図 9）。

結果は表２となり、黄金角[注6]である約 137.5°（ラジアンでは($3-\sqrt{5}$）π)に近い外角を持つ、１つ飛びのフィボナッチ数で現わされる正８／３角形、正１３／５角形ができるだけ辺が重ならないように予め計算された最もバランスの良い効果的な現れ方をしていた（図10）。また、外角の角度がａの黄金分割螺旋の一般式は$r = e^{0.4812a\theta}$で、効果的出現時の式は$r = e^{0.20051\theta}$、角度b(図5参照)は約78.7° となった。

3.分析と考察

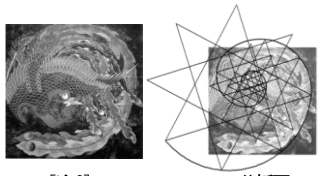
3.1.絵画に見る正８／３角形の黄金分割螺旋

黄金分割螺旋の軌跡が最も小さな値のフィボナッチ数である正８／３角形を例に（正確には正５／２角形が最も小さいが、外角が 144° と 137.5° からかなり離れているので本稿では例外とする）絵画において先の論文[注 7]での構図の分析から、本稿ではそのフォルムに重点を置いて分析していく。



［注8］　　分析図

図11　竹内栖鳳の「班猫」



［注9］　　分析図

図12　葛飾北斎の「鳳凰図」

なお､絵画と対数螺旋との合成には描画ソフト[注 10]と CAD ソフト[注 4]の両方を用いた。

(1) 竹内栖鳳の「班猫」　無背景のほぼ中央に猫 1 匹のみを配しオブジェクトのフォルムに黄金分割螺旋を重ね、さらに正８／３角形を描いた。黄金分割螺旋は左巻きと右巻きの両方が現れ、そして、どちらかが若干強調され、その結果、目から、宇宙へと螺旋の波動が拡大されて伝達されていることが確認できる（図 11）。また、宮廻正明の分析では猫の目から反時計回りの螺旋の構造に沿って猫の毛が描かれており、螺旋の始めも終わりもない永遠につながるという性質から宇宙につながり、猫の背景の金泥は日本独特のもので宇宙に近い色であると指摘している[注 11]。

(2) 葛飾北斎の「鳳凰図」　オブジェクトの周囲に余白がなく、螺旋はオブジェクトの体の中に収束し、見る者の意識を対数螺旋の波動に乗せて鳳凰の体の内部へさらに奥深くへと吸い寄せている（図 12）。

4.展望

見る者の意識を集中させながら波動に乗って宇宙へ導いたり､1 点へと引きずり込んだりして、制作者は作品の世界観や制作意図を確実に伝えていく。緻密に計算された黄金分割螺旋のこの技法を用いて、これからの建築・インテリアにおけるデザインへの展開とその応用を考えていきたい。

謝辞　本研究を進めるに当たり、大阪市立大学の釜江哲朗氏に数学に関する助言をいただきました。また、研究協力者である梅花女子大学短期大学部 伊藤泰子氏、梅花女子大学 加藤善彦氏・野田英行氏には多方面でご助力をいただきました。ここに記して感謝いたします。なお、本研究は JSPS 科研費 25350035 の助成を受け、報告するものです。

注および参考文献

1) マリオ・リヴィオ，斉藤隆央：黄金比はすべてを美しくするか？，早川書房，107，2012
2) 佐藤修一：自然にひそむ数学，講談社，71-74，2003
3) 上村文隆：生き物たちのエレガントな数学，技術評論社，30-54，2007
4) CAD ソフト 「VectorWorks2013」 エーアンドエー株式会社
5) 朝山秀一：フラクタルとカオスの建築デザインと制御への応用， 日本ファジィ学会誌，9，2，198-205，1997
6) 前掲書 3)，253
7) 吉田美穂子：形の美を構成する対数螺旋とフラクタル，梅花女子大学短期大学部研究紀要，62，69-84，2014
8) 竹内栖鳳：竹内栖鳳，青幻舎，11，2009
9) 葛飾北斎：葛飾北斎，新潮社 ，71，1998
10) 描画ソフト 「PhotoShop CS6」 アドビシステムズ社
11) 美の巨人たち http://www.tv-tokyo.co.jp/kyojin/backnumber/130928/index.html